Université PANTHÉON - ASSAS (PARIS II) **U.E.F.1**

Droit - Economie - Sciences Sociales **5007**

Melun

Session : Janvier 2019

Année d'étude : Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion

Discipline : ***Mathématiques 3***

(Unité d'Enseignements Fondamentaux 1)

Titulaire(s) du cours :

M. Matthieu RICHARD

Document(s) autorisé(s) :

Aucun

Université Paris II - Institut de droit et d'économie de Melun Mathématiques 3 (5007)
Licence 2 Sciences économiques et Gestion Cours de M. RICHARD

Janvier 2019

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (-2x + 4y; 0; x - 2y).$$

1. a) Montrer que f est une application linéaire.
b) Déterminer $Ker\ f$. Quelle est sa dimension ? Justifier.
c) f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.
d) Quelle est la dimension de $Im\ f$. Déterminer une base de $Im\ f$.
e) Déterminer la matrice A représentant l'application f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que B est inversible puis déterminer son inverse.
b) Résoudre le système linéaire suivant : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ y + 4z = 3 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$

3. On note g l'application linéaire dont la représentation matricielle dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est B.
a) Donner l'expression de g, autrement dit pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $g(x, y, z)$.
b) Calculer le produit BA.
c) Peut-on calculer le produit AB ? Justifier.
d) De quelle application linéaire le produit BA est-il la représentation matricielle ?

Exercice 2

1. On considère l'ensemble $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $2x - 3y + z = 0\}$.
a) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
b) Montrer que A ne contient pas tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
c) Donner deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui appartiennent à A et sont linéairement indépendants.
d) Déterminer une base ainsi que la dimension de A.

2. Soit B le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $(1, 0, 2)$.
a) Prouver que $A \cap B$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
b) Montrer que $A \cap B = \{\vec{0}\}$.
c) Prouver que $\mathbb{R}^3 = A \bigoplus B$, autrement dit que $\mathbb{R}^3$ est la somme directe de A et B.
Indication : On rappelle que $\mathbb{R}^3 = A \bigoplus B$ si pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique vecteur $\vec{a} \in A$ et un unique vecteur $\vec{b} \in B$ tels que $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.

Tourner la page

Exercice 3

Pour chaque question, indiquer **sur votre copie** et **sans justification** la **ou** les lettres correspondant aux bonnes réponses.

1. La famille $\{(1,2,0);(2,1,0);(0,1,1)\}$ ...
A. ...est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
B. ...est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
C. ...est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Parmi les ensembles suivants, indiquer lesquels sont des espaces vectoriels.
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $3x + y + 2z = 1\}$.
$B = \mathbb{R}^6$.
$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x - y = 0\}$.
$D = \mathbb{R}^*$.
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.

3. Parmi les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, indiquer lesquelles sont linéaires.
A. $f(x,y,z) = (3x^2 + y - z; 1)$.
B. $g(x,y,z) = (2x + y; x + y - z)$.
C. $h(x,y,z) = (3x; 0)$.