Université PANTHÉON - ASSAS (PARIS II) **U.E.F.1**

Droit - Economie - Sciences Sociales **5007**

Melun

Session : Septembre 2019

Année d'étude : Deuxième année de Licence économie-gestion mention économie et gestion

Discipline : ***Mathématiques 3***

(Unité d'Enseignements Fondamentaux 1)

Titulaire(s) du cours :

M. Matthieu RICHARD

Document(s) autorisé(s) :

Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Université Paris II - Institut de droit et d'économie de Melun Mathématiques 3 (5007)
Licence 2 Sciences économiques et Gestion Cours de M. RICHARD

Septembre 2019

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 2x - 3y = 0\},\ B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y + z = 0\}.$$

a) Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer une base de A, puis donner sa dimension.

On admet que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
c) Déterminer une base de B.
d) Montrer que $A \cap B$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
e) Donner un exemple de vecteur appartenant à la fois à A et à B. En déduire une base ainsi que la dimension de $A \cap B$.

Exercice 2

Soient $\vec{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$ et $\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sont exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
a) Montrer que la famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.
c) Soit $\vec{v}$ un vecteur dont les coordonnées dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ sont $(2, 3, 1)$. Exprimer les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

1. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y) = (x + 3y, -x + 2y, y).$$

a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer une base ainsi que la dimension de $Ker\ f$.
c) Déterminer la dimension de $Im\ f$ puis en donner une base.
d) f est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier.
e) Combien de solutions admet l'équation $f(x, y) = (0, 0, 0)$?
f) Combien de solutions admet l'équation $f(x, y) = (1, 1, 1)$?

2. Soit g une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que B est inversible.
b) Déterminer la matrice inverse de la matrice B.
c) Résoudre l'équation $g(x, y, z) = (0, 4, -1)$.